

令和9年度 教科専門試験 高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号					得点	30 点
------	---	------	----	------	--	--	--	--	----	------

1

①ケ ②カ ③オ ④イ ⑤ク

5 点

2

$$f(x) = 2x^2 - 2(a+1)x + 2a + 8 = 2\left\{x - \frac{1}{2}(a+1)\right\}^2 - \frac{1}{2}(a-5)(a+3)$$

$$\text{頂点 } \left(\frac{1}{2}(a+1), -\frac{1}{2}(a-5)(a+3)\right) \quad \text{軸 } x = \frac{1}{2}(a+1)$$

(1) すべての実数 x に対して $f(x) \geq 0$ であるから、

$$-\frac{1}{2}(a-5)(a+3) \geq 0 \quad (a-5)(a+3) \leq 0$$

したがって、 $-3 \leq a \leq 5 \dots \textcircled{1}$

10 点

(2) ①より軸について $-1 \leq \frac{1}{2}(a+1) \leq 3$ となる(i) $-1 \leq \frac{1}{2}(a+1) < 0$ すなわち $-3 \leq a < -1$ のとき最小値は $x=0$ のとき $2a+8$ をとる(ii) $0 \leq \frac{1}{2}(a+1) < 2$ すなわち $-1 \leq a < 3$ のとき最小値は $x = \frac{1}{2}(a+1)$ のとき $-\frac{1}{2}(a-5)(a+3)$ をとる(iii) $2 \leq \frac{1}{2}(a+1) \leq 3$ すなわち $3 \leq a \leq 5$ のとき最小値は $x=2$ のとき $12-2a$ をとる

15 点

したがって、(i)～(iii)より

$$m = \begin{cases} 2a+8 & (-3 \leq a < -1 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{2}(a-5)(a+3) & (-1 \leq a < 3 \text{ のとき}) \\ 12-2a & (3 \leq a \leq 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

令和9年度 教科専門試験 高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号					得点	30 点
------	---	------	----	------	--	--	--	--	----	------

3

- (1) 12個の○と仕切り2本を1列に並べ、その間の仕切りで分けられた3か所の○の個数を、左から順に x, y, z とすればよい。

よって、求める個数は ${}_{14}C_2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ (通り)

10 点

- (2) (ア) 1つの面の色を固定する。その面の対面の色の塗り方は5通りある。そのおのおのに対して、残りの4面の塗り方は、異なる4個の円順列の総数に等しいから $(4-1)!$ 通りである。

よって、求める塗り方の総数は $5 \times (4-1)! = 5 \times 6 = 30$ (通り)

10 点

- (イ) 立方体を異なる5色で塗るとき、隣り合わない2面を同じ色で塗ることになり、この色の決め方が5通りある。残りの4面の塗り方は、4色の数珠順列の考え方になるため、 $\frac{(4-1)!}{2} = 3$ 通りになる。

よって、求める塗り方の総数は $5 \times 3 = 15$ (通り)

10 点

令和9年度 教科専門試験 高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号					得点	40 点
------	---	------	----	------	--	--	--	--	----	------

4

(1) $x+y+z=0$ のとき, $z=-(x+y)$

$$\begin{aligned} \text{代入して, } x^3+y^3+z^3-3xyz &= x^3+y^3-(x+y)^3+3xy(x+y) \\ &= x^3+y^3-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3+3x^2y+3xy^2=0 \end{aligned}$$

10 点

(2) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\}$

$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geq 0$$

ゆえに, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0$ 等号成立は, $x=y=z$ のときである。

10 点

(3) (1) より $x^3+y^3+z^3-3xyz$ は, $x+y+z$ を因数にもち,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\dots\textcircled{1}$$

ここで, $a>0, b>0, c>0$ より,

$$x=\sqrt[3]{a}(>0), y=\sqrt[3]{b}(>0), z=\sqrt[3]{c}(>0) \text{ とおくと, } x^3+y^3+z^3-3xyz=a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$$

また, $x+y+z>0$ と (2) より, ①は

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\geq 0$$

$$\text{したがって, } a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\geq 0 \text{ よって, } \frac{a+b+c}{3}\geq \sqrt[3]{abc}$$

等号成立は, $x=y=z$ つまり $a=b=c$ のときである。

10 点

(4) $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)-\frac{1}{3}\{f(x)+f(y)+f(z)\}$

$$=\log_2\left(\frac{x+y+z}{3}\right)-\frac{1}{3}(\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z)=\log_2\frac{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

ここで真数は正なので $x>0, y>0, z>0$ と (3) より,

$$\frac{x+y+z}{3}\geq \sqrt[3]{xyz} \quad (\text{等号成立は, } x=y=z \text{ のときである})$$

$$\text{ゆえに } \frac{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 1 \quad \text{よって, 底 } 2>1 \text{ だから } \log_2\frac{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 0$$

$$\text{よって } f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \text{ が成立し, 等号成立は, } x=y=z \text{ のときである}$$

10 点

令和9年度 教科専門試験 高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号					得点	30 点
------	---	------	----	------	--	--	--	--	----	------

5

- ①ア ②ウ ③カ ④255 ⑤9.6 ⑥400
 ⑦ク ⑧ $Z \leq -1.96, 1.96 \leq Z$ ⑨ -2.08 ⑩ケ

10 点

6

- (1) 第 n 群は 2^{n-1} 個の自然数を含むから、第 n 群の最初の項は、 $n \geq 2$ のとき

$$(1 + 2 + \cdots + 2^{n-2}) + 1 = \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{n-1} \text{ (番目) あり}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって、第 n 群の最初の自然数は $2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$

10 点

- (2) 501 が第 n 群にあるとすると $2^n - 1 \leq 501 < 2^{n+1} - 1$ ①

$2^8 = 256, 2^9 = 512$ であるから、① を満たす自然数 n は $n = 8$

501 が第 8 群の第 m 項であるとして $2^8 + \{2(m-1) - 1\} = 501$ から $m = 124$

よって 第 8 群の第 124 項

10 点

令和9年度 教科専門試験 高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号					得点	30 点
------	---	------	----	------	--	--	--	--	----	------

7

(1) 点 A' は直線 PA と xy 平面との交点である。

$P(1, 0, 7)$ と $A(1, 0, 2)$ は x 成分, y 成分がそれぞれ等しいから, 直線 PA は z 軸に平行な直線となる。

よって, 点 A' の座標は $(1, 0, 0)$

点 B' は直線 PB と xy 平面との交点である。

よって, $\overrightarrow{PB'} = k\overrightarrow{PB}$ となる実数 k がある。

原点を O とすると, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = (-1, 2, -4)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB'} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PB} \\ &= (1, 0, 7) + (-k, 2k, -4k) \\ &= (1-k, 2k, 7-4k)\end{aligned}$$

B' の z 座標は 0 であるから $7-4k=0$

$$\text{よって } k = \frac{7}{4}$$

ゆえに, 点 B' の座標は $\left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{2}, 0\right)$

(2) 点 C の影を C' とすると, C' は直線 PC と xy 平面との交点である。

よって, $\overrightarrow{PC'} = l\overrightarrow{PC}$ となる実数 l がある。

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = (-1, a, -3)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC'} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC'} = \overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{PC} \\ &= (1, 0, 7) + (-l, al, -3l) \\ &= (1-l, al, 7-3l)\end{aligned}$$

C' の z 座標は 0 であるから $7-3l=0$

$$\text{よって } l = \frac{7}{3}$$

ゆえに, 点 C' の座標は $\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}a, 0\right)$

3点 A' , B' , C' が一直線上にあるとき, $\overrightarrow{A'C'} = m\overrightarrow{A'B'}$ となる実数 m がある。

$$\overrightarrow{A'C'} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}a, 0\right), \overrightarrow{A'B'} = \left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{2}, 0\right)$$

$$\text{よって } \left(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}a, 0\right) = m\left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{2}, 0\right)$$

$$\text{ゆえに } -\frac{7}{3} = -\frac{7}{4}m, \frac{7}{3}a = \frac{7}{2}m$$

$$\text{これを解いて } m = \frac{4}{3}, a = 2$$

15 点

15 点

令和9年度 教科専門試験 高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	40 点
------	---	------	----	------	--	--	--	--	--	----	------

8

$$(1) \quad \int x^2 \sin x dx = \int x^2 (-\cos x)' dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \quad (\text{ただし, } C \text{ は積分定数})$$

10 点

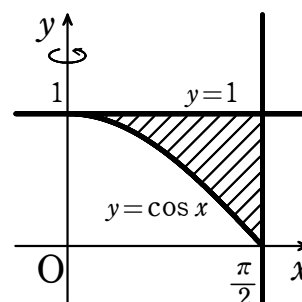
$$(2) \quad \text{曲線 } y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ と } y \text{ 軸および直線 } y=1, \quad x=\frac{\pi}{2} \text{ によって囲まれた部分は,}$$

次の図の斜線部分のようになる。

$$y = \cos x \text{ より } dy = -\sin x dx$$

 y と x の対応は右のようにとれる。

y	$0 \rightarrow 1$
x	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$



$$V_1 = \pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 1 - \int_0^1 \pi x^2 dy = \frac{1}{4} \pi^3 + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2 \sin x dx$$

$$= \frac{1}{4} \pi^3 - \pi [-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \pi^3 - \pi(\pi - 2)$$

$$= \frac{1}{4} \pi^3 - \pi^2 + 2\pi$$

15 点

$$(3) \quad \text{曲線 } y = \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ と } y \text{ 軸および直線 } x = \frac{\pi}{2}, \quad y = k (k > 1) \text{ によって囲まれた部分}$$

は, 図の斜線部分のようになる。

$$V_2 = \pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (k-1) + \int_0^1 \pi x^2 dy = \frac{1}{4} \pi^3 k - \frac{\pi^3}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 \cos x dx$$

$$\text{ここで, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} + 2[x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

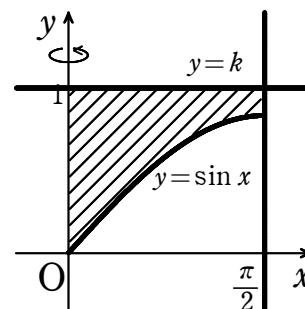
$$= \frac{\pi^2}{4} - 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$\text{ゆえに, } V_2 = \frac{\pi^3}{4} k - 2\pi$$

$$V_1 = V_2 \quad \text{より, } \frac{1}{4} \pi^3 - \pi^2 + 2\pi = \frac{\pi^3}{4} k - 2\pi$$

$$k = 1 - \frac{4}{\pi} + \frac{16}{\pi^2}$$

$$\text{ここで, } k-1 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} - 1\right) > 0 \quad k = 1 - \frac{4}{\pi} + \frac{16}{\pi^2} \text{ は, } k > 1 \text{ を満たす。}$$



15 点